

Topologie

STEP, MINES ParisTech

5 mars 2021 (#72befad)

Question 1 Soit $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ le cercle unité de \mathbb{R}^2 et d la distance sur C dérivée de la norme euclidienne sur \mathbb{R}^2 . Dans ce contexte, la distance entre les points $(-1, 0)$ et $(1, 0)$ de C vaut

- A : 2.
- B : π .
- C : 2π .

Question 2 L'ensemble \mathbb{R}^2 étant muni de la norme euclidienne, la norme d'opérateur $\|A\|$ de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

est égale à

- A : 0.
- B : 1.
- C : $\sqrt{2}$.

Question 3 (réponse multiple) Dans \mathbb{R} , muni de la norme $\|\cdot\| = |\cdot|$,

- A : l'ensemble $[0, 1]$ est fermé.
- B : l'ensemble $\{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ est fermé.
- C : l'ensemble $[0, +\infty[$ est fermé.

Question 4 (réponse multiple) Dans un espace métrique X , un ensemble A est ouvert si et seulement si

- A : le complémentaire A^c de A dans X est fermé.
- B : sa frontière ∂A est vide.
- C : l'ensemble A n'est pas fermé.

Question 5 (réponse multiple) Dans le plan euclidien, identifiez les ensembles qui sont des voisinages de l'origine

- A: $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 1 \text{ et } x_2 \geq 1\}$
- B: $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0\}$
- C: $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq -1 \text{ et } x_2 \geq -1\}$

Question 6 (réponse multiple) Dans un espace métrique, si $A \subset B$, alors :

- A : $\overline{A} \subset \overline{B}$
- B : $\partial A \subset \partial B$
- C : $A^\circ \subset B^\circ$

Question 7 Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et $a \in \mathbb{R}$, que peut-on dire de l'ensemble de niveau $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1, x_2) = a\}$?

Réponse : l'ensemble A est

Question 8 Si une suite de vecteurs x_k de \mathbb{R}^n vérifie

$$\|x_{k+2} - x_{k+1}\| \leq 0.5 \times \|x_{k+1} - x_k\|,$$

est-ce qu'elle converge nécessairement ?

- A : oui.
- B : non.

Question 9 Dans le plan euclidien, l'ensemble $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0\}$ est-il complet ?

- A : oui.
- B : non.